Система последовательного введения и освоения учащимися функциональных методов решения задач

Романенко Оксана Ивановна,
учитель математики
ГУО Гимназия Сморгони»

Мною апробирована и используется следующая система последовательного введения и освоения учащимися функциональных методов.

1. Подготовку к восприятию функциональных методов решения задач начинаю с 6 класса. В частности, при изучении темы «Модуль числа» обращаю внимание на то, что модуль числа всегда неотрицательный и что модули противоположных чисел равны, обязательно несколько раз возвращаюсь к этим фактам, решая и анализируя с учащимися упражнения такого типа, как № 7.77, 7.78 из учебника и 3.26 из сборника задач. Затем (через некоторое время) для закрепления в качестве устных упражнений предлагаю решить уравнения типа |x|=3; |y|=0; |p|=-4 и т. д. Дальнейшее усвоение этих свойств модуля происходит уже при изучении тем «Сложение и вычитание рациональных чисел» в ходе решения упражнений из сборника № 3.30, 3.37 (1,2) и подобных им (ещё подбираю уравнения, в которых модуль выражения равен нулю или отрицательному числу). Далее, при изучении темы «Умножение рациональных чисел», а затем и «Степень с целым показателем» добиваюсь усвоения учащимися того факта, что чётная степень числа всегда неотрицательна. Кроме чисто вычислительных упражнений, включаю в содержание урока и уравнения типа 3.31, 3.37(3,4), 3.47 из сборника задач. В 6-м классе также изучаются линейная функция и обратная пропорциональность, только называются они пока зависимостями. Учащиеся получают представление о графиках зависимостей, а я всегда предлагаю по построенному графику проанализировать: если по этому графику идти слева направо (т.е. фактически при возрастании x), то мы поднимаемся или опускаемся, и от чего в формуле это зависит? Так учащиеся делают выводы о возрастании и убывании функции, хотя называют это пока по-другому.
2. В курсе алгебры 7 класса мы уже работаем с понятием функции, области определения функции, закрепляем знания о свойствах линейной функции и прямой пропорциональности и постоянной функции как её частных видов, а также рассматриваем условие параллельности прямых. При этом, анализируя графики, мы повторяем (в понятных для учащихся терминах) свойства монотонности функций, а также говорим об области значений функций (какие значения принимает y, без называния промежутков). Кроме того, есть ряд полезных упражнений на нахождение области определения выражения ещё в теме «Выражения с переменной», как, например, № 1.18, 1.21 из учебника. В дальнейшем необходимо пояснить, что фактически мы находим естественную область определения

функции, и уже при изучении темы «Понятие функции» по возможности включать в содержание урока подобные упражнения.

3. При изучении алгебры в 8 классе важно добиться чёткого усвоения свойств числовых неравенств, т. к. в дальнейшем область значений некоторых функций находится именно с использованием этих свойств. В частности, если свойство п.1.6 № 5 «если $a \le b$ и $c<0$, то $ac \ge bc$» неплохо закрепляется в дальнейшем в ходе решения линейных неравенств, то свойство 8 «если $a \le b$ и числа a и b- числа одного знака, то $\frac{1}{a} \ge \frac{1}{b}$» фактически применяется лишь в двух упражнениях из темы «Двойные неравенства». Два важных неравенства рассматриваются в теме «Доказательство неравенств». Это пример 1: $a^2 + b^2 \ge 2ab$. Мы с учащимися, наряду с ним, доказываем $a^2 + b^2 \ge -2ab$, и в общем виде $a^2 + b^2 \ge 2|ab|$. И пример 2: при $a>0$ $a + \frac{1}{a} \ge 2$, плюс к этому обязательно доказываем, что при $a<0$ $a + \frac{1}{a} \le -2$, и выясняем, когда в этих нестрогих неравенствах выполняется **равенство**. С учащимися - олимпиадниками можно рассмотреть эти неравенства как частные случаи неравенства Коши, но вообще для применения в дальнейшем функциональных методов решения задач нужно чётко знать фактически область значений функции $y = x + \frac{1}{x}$, а на уровне 8-го класса свойство суммы двух взаимно обратных выражений. Кроме заданий на доказательство неравенств, предлагаю учащимся для закрепления этого свойства устно решить уравнения типа $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2+1} = 1{,}5$; $\frac{x^2+2x-7}{x-4} + \frac{x-4}{x^2+2x-7} = -0{,}7$ и т. д. При изучении темы «Квадратные корни» обращаем внимание на то, что квадратный корень не только вычисляется из неотрицательного числа, но и его значение неотрицательно. В теме «Метод выделения полного квадрата» добиваемся чёткого усвоения этого метода, при изучении темы «Формула корней квадратного уравнения»- усвоения условия наличия корней. При изучении темы «Квадратичная функция», кроме прочих свойств, указываем область значений функции. На учебных занятиях использую задачи 1-24 из сборника.

4. В курсе алгебры 9 класса при изучении свойств функций добиваюсь понимания свойств монотонности, области значений. На занятиях предлагаю решать уравнения, которые сводятся к системам уравнений (раздел «Подготовительные задачи»).

5. В 10 классе учащиеся получают представление о чётности функций (можно использовать это свойство при решении уравнений), о свойствах тригонометрических функций. Особенно важны с точки зрения функциональных методов ограниченность тригонометрических функций и полученных из них преобразованиями, а также то, что тангенс и котангенс одного и того же аргумента - взаимно обратные числа. При изучении

свойств возрастания и убывания функции рассматриваем теорему о корне, которая является ключевой при использовании монотонности функций, а также следующие теоремы: 1) если функция f(x) возрастает на некотором промежутке, а функция g(x) убывает на этом промежутке (часто на всей области определения), то уравнение f(x)=g(x) имеет на этом промежутке не более одного корня *а* (хорошо иллюстрируется графически); 2) решение неравенства f(x)≤g(x) – это x≤*a*, а неравенства f(x)≥g(x) - x≥*a* (аналогично со строгим знаком); 3) если функция f(x) монотонна на некотором промежутке, то уравнение f(t)=f(k) равносильно уравнению t=k. Кроме этого, даю учащимся понятие о сложной функции. В учебнике в п.3.13 рассмотрено 4 примера использования и монотонности, и ограниченности, и чётности функций и № 3.194, в котором используется только ограниченность [8]. На мой взгляд, с учащимися целесообразно начинать с решения более лёгких, подготовительных упражнений из составленного сборника (№ 1 - 18). Кроме того, сборник предоставляет больший набор тренировочных задач (№ 19 - 85). В 10 классе мы с учащимися начинаем составлять и использовать в работе памятку « Функциональные методы решения задач». (Приложение 3)

Практическая реализация данного педагогического опыта осуществлялась на базе ГУО «Гимназия г. Сморгони» в 10 (11) «А» и 10 (11) «В» классах и сопровождалась постоянным отслеживанием результатов. Учащиеся обучались в классах физико-математического направления, где в течение двух лет (2010-2012 г. г.) систематически на уроках, факультативных занятиях и курсах по подготовке к ЦТ по математике изучались функциональные методы решения задач.

Поскольку классы были сформированы в 2010 году, учащиеся имели разный уровень подготовки. Поэтому в начале работы с классами, на уроках по первой теме алгебры 10 класса «Производная», а также на занятиях факультатива «Алгебра учит рассуждать», который посещали **все** учащиеся, на занятиях курсов по подготовке к ЦТ я осуществляла системное повторение материала базовой школы, в том числе свойств функций, свойств числовых неравенств и т. д. В результате ко времени изучения темы «Тригонометрические уравнения» я имела возможность уже на уроках приступить к изучению, наряду с основными, функциональных методов решения уравнений. Умение применять функциональные методы проверялось в ходе выполнения самостоятельных и контрольных работ по теме, где уравнения, решаемые функциональными методами, включались в качестве заданий 5-го уровня

6. В учебнике алгебры 11 класса в п.1.14 («Решение иррациональных уравнений с использованием свойств функций») есть формулировка и доказательство теоремы 1, а также набор уравнений, решаемых с использованием области определения и монотонности функций [8]. Материал по этой теме дополняю упражнениями из сборника № 103-110 раздела 2 и № 35 – 51 раздела 3. При изучении темы «Иррациональные неравенства»-№ 63-67 раздела 3. В п. 2.2 «Показательная функция»

полезные с точки зрения применения ограниченности функций, упражнения 2.26 – 2.28. В п. 2.3 «Показательные уравнения» рассмотрен один пример решения показательного уравнения с использованием монотонности, но соответствующих упражнений нет. Материал по этой теме дополняю заданиями из сборника № 86-102, 111-112 раздела 2, № 1-15, 22, 52-53, 55-56, 59-60 раздела 3, при изучении темы «Показательные неравенства» № 166-171 раздела 2 и № 68, 70, 77 раздела 3 . В п. 2.7 «Логарифмическая функция» упражнение 2.168 хорошо иллюстрирует метод, основанный на монотонности функций. Однако в учебнике нет логарифмических уравнений и неравенств, решаемых функциональными методами. По данным темам, а также при заключительном повторении материала я включаю в содержание занятий упражнения из сборника № 113-146, 154-165 раздела 2, № 16-21, 23-34, 50, 57-58, 69, 71-76, 78-91 раздела 3. В 11-м классе мы с учащимися заканчиваем составление памятки «Функциональные методы решения задач».
(Приложение 3)

В указанных 11 классах работа над темой продолжалась следующим образом: при изучении тем «Иррациональные уравнения и неравенства», «Показательные уравнения и неравенства», «Логарифмические уравнения и неравенства» на учебных занятиях изучались функциональные методы решения соответствующих заданий, закрепление умений применять функциональные методы осуществлялось на занятиях факультатива «Алгебра учит рассуждать», курсов по подготовке к ЦТ. Сформированность умения использовать функциональные методы проверялась путём включения соответствующих заданий в самостоятельные и контрольные работы.