ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ В НЕСТАНДАРТНЫХ СИТУАЦИЯХ

Прискока Татьяна Сергеевна,
заместитель директора,
учитель математики
ГУО «Гимназия №3 г.Гродно»

Формулы школьного курса следует знать наизусть, так как они применяются практически во всех разделах математики. Ниже приведенные формулы не нужно заучивать наизусть, но показывать их применение для нестандартных задач очень полезно, особенно при подготовке к олимпиадам и ЦТ.

Следствия из формул сокращенного умножения:

$(a+b)^2-2ab=a^2+2ab+b^2-2ab=a^2+b^2$

$(a-b)^2+2ab=a^2-2ab+b^2+2ab=a^2+b^2$

Квадрат суммы (разности) трех выражений:

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$(a-b+c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$

$(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$

$(a-b-c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$

Биквадрат суммы, разности.

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$, где $n \in N$

Рассмотрим таблицу формул, не входящих в школьную программу, которые полезны при решении задач повышенной сложности, с помощью которых решены многие трудные олимпиадные задачи.

Таблица 1 Формулы, позволяющие сократить преобразования выражений и упростить решения сложных задач.

№ п/п	Формула

1	$а^2 + в^2=(а+в)^2-2ав$
2	$(а - в)^2=(а+в)^2-4ав$
3	$a^3 + b^3= (a + b)^3 - 3ab(a + b)$,
4	$a^3 – b^3 =(a – b)^3 + 3ab(a – b)$.
5	$a^3 + b^3= (a + b)((a + b)^2 - 3ab)$,
6	$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.
7	$(a – b)^3 = a^3 – b^3 – 3ab(a – b)$.
8	$a^4 – b^4 = (a – b)(a + b)(a^2 + b^2)$
9	$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$,
10	$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 – a^3b+ a^2b^2 –ab^3 + b^4)$
11	$(10п +5)^2 = п(п+1)*100 +25$, например $35^2= 3*4*100+25=1225$
12	$(10^п+1)^2= 10^{2п}+2*10^п+1$
13	$(10^п - 1)^2= 10^{2п} - 2*10^п+1$
14	$(x+y+ z)^3 - x^3- y^3- z^3 = 3(x+y)(y+ z)(x+ z)$.
15	$(ad – bc)^2 + (ac + bd)^2 = (a^2+ b^2)(c^2+d^2)$
16	$(x+y)(y+ z) = (x+y+ z)y + xz$.

Приведем некоторые задания из репетиционных тестов для подготовки к ЦТ.

<u>Задача №1.</u> Вычислить рациональным способом:

а) $(65^2-32^2-97*11): (61^2-36^2)+(56^2-26^2): (66^2-16^2)$

Решение: данное выражение не очень сложное. Преобразуем его и запишем в виде дроби:

$$\frac{\left(65^2+32^2+2*65*32\right)}{61^2-36^2}+\frac{\left(56^2-26^2\right)}{66^2-16^2}$$

Применив формулы сокращенного умножения, получаем

$(65^2-32^2-97*11): (61^2-36^2)+(56^2-26^2): (66^2-16^2)=4,48$

б) $$\frac{(\frac{97^3-53^3}{44}+97*53):(152{,}5^2-27{,}5^2)}{(36{,}5^2-17{,}5^2):(\frac{57^3+33^3}{90}-57*33)}$$

Решение: в отличие от предыдущего это выражение насыщено различными формулами.

Ответ: 96/171

Задача №2.

Упростить:

$$(1-a)(1-a+a^2)(1+a+a^2)(1+a)$$

Решение:

$$(1-a)(1-a+a^2)(1+a+a^2)(1+a)=(1-a^3)(1+a^3)=1-(a^3)^2=1-a^6$$

Задача №3

Упростить и вычислить:

а)

$$\frac{9c^2-16}{16-24c+9c^2},$$

$$c=\frac{7}{9}$$

Решение:

$$\frac{9c^2-16}{16-24c+9c^2}=\frac{(3c-4)(3c+4)}{(4-3c)^2}=-\frac{3c+4}{4-3c}$$

При

$c = \frac{7}{9}$:
$$\frac{3*\frac{7}{9}+4}{4-3*\frac{7}{9}} = \frac{3\frac{2}{3}}{\frac{-3}{3}} = \frac{-11}{3}$$

Ответ: -11/3

б) $\frac{3a^3 + ab^2 - 6a^2b - 2b^3}{9a^5 - ab^4 - 18a^4b + 2b^5}$,

$при \quad a = 0{,}2; \quad в = 0{,}4$

Решение: применим способ группировки слагаемых:

$$\frac{3a^3 + ав^2 - 6a^2в - 2в^3}{9a^5 - ав^4 - 18a^4в + 2в^5} = \frac{\left(3a^3 - 6a^2в\right) + \left(ав^2 - 2в^3\right)}{\left(9a^5 - 18a^4в\right) + \left(2в^5 - ав^4\right)} =$$

$$= \frac{3a^2\left(a - 2в\right) + в^2\left(a - 2в\right)}{9a^4\left(a - 2в\right) + в^4\left(2в - a\right)} = \frac{\left(3a^2 + в^2\right)}{\left(9a^4 - в^4\right)} = \frac{\left(3a^2 + в^2\right)}{\left(3a^2 - в^2\right)\left(3a^2 + в^2\right)} = \frac{1}{\left(3a^2 - в^2\right)}$$

$a = 0{,}2 \quad в = 0{,}4$, теперь вычисления будут более простыми:

$$\frac{1}{3*0{,}2^2 - 0{,}4^2} = \frac{1}{3*0{,}04 - 0{,}16} = -25$$

Ответ: -25

Задача №4. Доказать тождество из «Арифметики» Диофанта:

$$\frac{144}{x^4 - 60x^2 + 900}*30 + \frac{60}{x^2 - 30} = \frac{60x^2 + 2520}{x^4 - 60x^2 + 900}$$

Решение:

$$x^4 - 60x^2 + 900 = (x^2 - 30)^2$$

$$\frac{144*30}{(x^2-30)^2} + \frac{60}{x^2-30} = \frac{60x^2+2520}{(x^2-30)^2}$$

$$\frac{30*(144-60)-2520}{(x^2-30)^2} = 0$$

$$\frac{2520-2520}{(x^2-30)^2} = 0$$

$$0 = 0$$

Данные формулы используются в задачах на делимость чисел, на доказательство кратности чисел, на сравнение чисел.

Задача №1. Доказать, что $a^5 + b^5$ без остатка делится на (a + b), где a и в – натуральные числа. Так как $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$, то $a^5 + b^5$ без остатка делится на (a + b).

Задача №2.7(а). [4, 115 с.]. Докажите, что сумма $17^{11}+5^{11}$делится без остатка на 22.

Задача №3. Доказать, что при любом натуральном k значение выражения $(3k+1)^2-(3k-1)^2$ делится на 12. [5].

Решение. Воспользовавшись формулой: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$,

упростим данное выражение: $(3k+1)^2-(3k-1)^2=(3k+1-3k+1)(3k+1+3k-1)=2*6k=$ $=12k$

Полученное выражение 12k делится на 12 без остатка.

Задача№4. [6,с. 46]. Найдите значения числового выражения, выполнив соответствующие преобразования: $(2 - 1)(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) - 2^{16}$.

Решение. $(2 - 1)(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) - 2^{16} = (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) - 2^{16} = = (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) - 2^{16} = (2^8 - 1)(2^8 + 1) - 2^{16} = \cancel{2^{16}} - 1 - \cancel{2^{16}} = -1$.

Ответ: -1

Задача №5. [5].

Упростить выражение: $(x^2 – ax+ b)(b + x^2 – ax)+(ax–b)(ax–b)+(–ax+ x^2 + b)(ax – b)* 2$.

Решение. $(x^2 – ax + b)(b + x^2 – ax) + (ax – b)(ax – b) +(– ax + x^2 + b)(ax – b)* 2 =$
$= (x^2 – ax + b + ax – b)^2 = (x^{2)2} = x^4$.

Задача №2.39(б). [7, с. 68]. Найдите все тройки чисел, удовлетворяющих уравнению: $x^2+y^2+z^2 – xy - yz – zx = 0$.

Решение. Это задача повышенного уровня, легко решается, если умножить обе части уравнения на 2 и применить формулу квадрат разности двух чисел трижды. $2x^2+2y^2+2z^2 – 2xy - 2y z – 2zx = 0$. Получим: $(x-y)^2+(x -z)^2 + (y - z)^2=0$; $x =y = z$.

Ответ: (t,t,t), t- любое число.

Отметим, что на формулах сокращенного умножения основаны некоторые математические фокусы, позволяющие производить вычисления в уме. Например, можно практически устно возводить в квадрат числа, оканчивающиеся на 1 и 9. В самом деле

$71^2 = (70 + 1)^2 = 70^2 + 2 \bullet 70 \bullet 1 + 1^2 = 4900 + 140 + 1 = 5041$;

$91^2 = (90 + 1)^2 = 90^2 + 2 \bullet 90 \bullet 1 + 1^2 = 8100 + 180 + 1 = 8281$;

$69^2 = (70 – 1)^2 = 70^2 – 2 \bullet 70 \bullet 1 + 1^3 = 4900-140+1 = 4761$.

Иногда можно быстро возвести в квадрат и число, оканчивающееся цифрой 2 или цифрой 8. Например: $102^2 = (100 + 2)^2 = 100^2 + 2 \bullet 100 \bullet 2 + 2^2 = 10\,000 + 400 + 4 = 10404$;

$48^2 = (50 – 2)^2 = 50^2 – 2 \bullet 50 \bullet 2+ 2^2 = 2500 – 200 +4 = 2304$.

Но самый элегантный фокус связан с возведением в квадрат чисел, оканчивающихся цифрой 5. Проведем соответствующие рассуждения для 85^2. Имеем:

$85^2 = (80 + 5)^2 =80^2 + 2\bullet80\bullet5 + 5^2 =80(80+10)+25 = 80 \bullet 90 + 25 = 7200 + 25 = 7225$.

Замечаем, что для вычисления 85^2 достаточно была умножить 8 на 9 и к полученному результату приписать справа 25. Аналогично можно поступать и в других случаях. Например, $35^2 = 1225$ ($3 \cdot 4 = 12$ и .к полученному числу приписали справа 25); $65^2 = 4225$; $125^2 = 15625$ ($12 \cdot 13 = 156$ и к полученному числу приписали справа 25).

Найдем общую закономерность и выведем новую формулу:

$(10п +5)^2= 100п^2+100п +25= п(п+1)*100 +25$.

$(10п +5)^2 = п(п+1)*100 +25$. [4, с. 107].

Задача №6. а) Вычислите 11^2, 101^2, 1001^2, $(10^п+1)^2= 10^{2п}+2*10^п+1$. Попробуйте угадать закономерность $100…01^2=$, где всего п цифр, используя ее, вычислите 10001^2,1000001^2.

б). Попробуйте угадать закономерность и вычислите $\underline{9…9}^2$, где цифра 9 повторяется п раз. Используя новую формулу $(10^п - 1)^2= 10^{2п} - 2*10^п+1$, вычислите 99999^2,9999999^2. [4, с.118].

Задача №7. Вычислить 99^3,используя формулу куб разности.

Р е ш е н и е : $99^3 = (100 - 1)^3 = 1000000 - 3 \cdot 10000 \cdot 1 + 3 \cdot 100 \cdot 1 - 1 = 970299$.

Задача №1.5(в) . [6]. Запишите многочлен в стандартном виде:

$(2-x)^3 + (x-1)^3$.

Можно использовать первые две формулы и привести подобные слагаемые. Применение новой формулы: $a^3 + b^3= (a + b)^3 - 3ab(a + b)$, позволит сократить вычисления и получить результат быстрее.

Решение: Если а =2-х, в = х-1, то

$(2-x)^3+(x-1)^3 = (2-x +x-1)^3-3 (x-1)(2-x)(2-x +x-1) = 1 - 3(2x-x^2-2+x) = 1-9x+3x^2+6 =3x^2-9x+7$

Вывод: Формулы из справочной таблицы (Таблица 1) позволяют сокращать преобразования, могут быть использованы при решении задач на уроках алгебры профильного уровня, а также при решении экзаменационных и конкурсных задач.

Задача №1.8. [6]. Освободится от иррациональности $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

Для учащихся 11 класса подобные задачи предлагаются в учебнике [8, с. 37].

Вопрос: какое число считается сопряженным числу $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$?

У данного числа три «сопряженных» числа: $1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$, $1-\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

Освобождение от знаменателя в данной задаче необходимо провести в два этапа.

$$\frac{\mathbf{1*(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}}{\mathbf{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})*(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}} = \frac{1*(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})-3} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+2\sqrt{2}+2)-3} = \frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})*2\sqrt{2}}{(2\sqrt{2})*(2\sqrt{2})} = \frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})*2\sqrt{2}}{8} = \frac{\mathbf{(2\sqrt{2}+4-2\sqrt{6})}}{\mathbf{8}}.$$

Задача №9. Напишите уравнение с целыми коэффициентами, один из корней которого равен $x = 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$. [9, с.48]

Решение. Уже было отмечено, что пары сопряженных чисел появляются при решении квадратных уравнений, когда корень из дискриминанта не извлекается.

Гипотеза: Можно предположить, что вместе с данным числом, уравнению с целыми коэффициентами удовлетворяют и сопряженные числа:

$1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$, $1-\sqrt{2}-\sqrt{3}$. Тогда искомое уравнение имеет вид:

$(x-1-\sqrt{2}-\sqrt{3})(x-1-\sqrt{2}+\sqrt{3})(x-1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(x-1+\sqrt{2}-\sqrt{3})=0.$

Умножая первую и третью скобки, вторую и четвертую, используя формулу разности квадратов двух выражений, получим

$((x-1)^2-5-((x-1)^2-5-2\sqrt{6})((x-1)^2-5+2\sqrt{6})=0;$

$((x^2-2x-4)-2\sqrt{6})(((x^2-2x-4)+2\sqrt{6})=0;$

$(x^2-2x-4)^2-24=0;$

Применяя уже рассмотренную ранее формулу: $(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$, *получим искомое уравнение*

$x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 16x - 8 = 0$.

Можно, подставляя сопряженные числа $1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$, $1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ убедиться, что они действительно являются корнями данного уравнения. Гипотеза подтвердилась.

Ответ: $x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 16x - 8$

Задача №10. Разложить на множители: $(x^2-1+x)(x^2-1+3x) + x^2$. ([8])

Решение.

1 способ.

Введем подстановку $x^2-1+2x = a$, тогда $x^2-1+x = a - x$, $x^2-1+3x = a+x$.

Данное в условии выражение приводится к известной формуле разности квадратов двух выражений: $(a-x)(a+x) + x^2 = a^2 - x^2 + x^2 = a^2 = (x^2-1+2x)^2$.

$(x^2-1+x)(x^2-1+3x) + x^2 = (x^2 - 1+2x)^2$

2 способ.

Введем подстановку $x^2-1+x = м$, тогда $x^2-1+x = м$, $x^2-1+3x = м+2x$.

Данное в условии выражение приведем к виду:

$м * (м+2x) + x^2 = м^2 + 2мx + x^2 = (м+x)^2$. Знакомая формула квадрата суммы двух выражений, позволяет без особых затруднений разложить данное выражение на множители. $(x^2-1+x)(x^2-1+3x) + x^2 = (x^2-1+x+x)^2 = (x^2 - 1+2x)^2$

Задача №11. Разложить на множители $(x^2-2+3x)(x^2-2+9x) + 8x^2$.

Решение. Используя второй или третий способы решения, получим

$$(x^2-2+3x)(x^2-2+9x) + 8x^2 = (x^2-2+5x)(x^2-2+7x).$$

Задача №12. Решите уравнение:

а). $(x^2-2+3x)(x^2-2+9x) + 8x^2 = 0$. б). $(x^2-1+x)(x^2-1+3x) + x^2 = 0$.

Данные уравнения решаются способом разложения правой части на множители.

Задача №13. Точный квадрат.

Докажите, что число1994*1995*1996*1998*1999*2000+36 является квадратом натурального числа.

Решение.

Выявим закономерность:

$(х-а)(х-в) = х^2 – ах-вх+ав = х^2 –(а+в)х+ав.$

$(х-а)(х-в)(х-с) = х^3-(а+в+с)х^2 +(ав+ас+вс)х – авс.$

$(х-а)(х-в)(х-с)(х-д)=х^4-(а+в+с+д)х^3+(ав+ас+ад+вс+вд+сд))х^2–(авс+авд+асд + всд) х +авсд.$

$Р_п (х) = (х-а)(х-в)(х-с)(х-д)…(х-р).$

$Р_п(х)= х^п- х^{п-1}(а+в+с+д+…+р) + х^{п-2}(ав+ ас+ ад+…) -х^{п-3}(авс +авд+…) +…. +(1)^п (авсд…)$

$Р_п (х) = а_0 х^п+ а_1х^{п-1}+а_2х^{п-2}+…+а_{п.}$ [2, с.205]

Применив его при решении , получим , $(п-3) (п-2)(п-1) (п+1)(п+2) (п+3) +36 = п^2 (п^2 -7)^2$ для $п>3$.Отсюда число в условии задачи равно $1997^2*(1997^2- 7)^2$, т.е. является квадратом натурального числа, что и требовалось доказать.

Задача №14.

Докажите, что число2008*2009*2010*2012*2013*2014+36 является квадратом натурального числа.

Задача легко решается по формуле: $(п-3) (п-2)(п-1) (п+1)(п+2) (п+3) +36 = п^2 (п^2 -7)^2$,

причем $п = 2011$.

Задача №15. Решить систему $\begin{cases} x^4+y^4=17, \\ x+y = 3. \end{cases}$

Указание. Используя формулу: $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$, преобразуем систему к виду

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = 17, \\ (x^2 + y^2) + 2xy = 9. \end{cases}$$

Данная система легко решается методом введения новых переменных $u = x^2 + y^2$, $v = xy$, где $u \geq 0$.

Задача №16. Найти действительные решения уравнения

$3(x^2+y^2+z^2) = 2(xy + yz + zx) + 16z – 56 + 8y$.

Решение. Перенесем все члены уравнения в левую часть и раскроем скобки. Заметим, что 56= 4+16+36 (квадраты чисел,2,4 и 6) , есть также квадраты чисел x, y и z, и всевозможные удвоенные произведения. Применим формулу квадрат суммы четырех слагаемых: $(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2bc + 2ad + 2bd + 2cd$.

$(x+y-z-2)^2 + (x-y+z-4)^2 + (x-y-z+6)^2 = 0$

Так x,y, z= действительные числа , то данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x+y-z-2=0; \\ x-y+z-4=0; \\ x-y-z+6=0 \end{cases}$$

Откуда x=3, y=4; z=5

Задача №17. Решить систему:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z = 8; \\ x + y + z^2 = 12; \\ xy + yz + xz = 11., \text{ где } x,y,z \text{- целые числа.} \end{cases}$$

Решение: Умножим третье уравнение на 2 и сложим все уравнения почленно, получим уравнение $(x + y + z)^2 + (x + y + z) – 42 = 0$.

Отсюда найдем, что $x + y + z = -7$, $x + y + z = 6$.

Из второго уравнения системы и последних двух уравнений найдем z, а затем, используя третье уравнение системы, найдем x и y.

Ответ: (2;1;3) , (1;2;3).