Памятка по применению функционального метода решения уравнений и неравенств

Романенко Оксана Ивановна,
учитель математики
ГУО «Гимназия г.Сморгони»

Если уравнение или неравенство не решается обычными методами или имеет «непонятный» вид (то ли тригонометрическое, то ли показательное и т. д.), то, скорее всего, при его решении могут быть использованы функциональные методы. В частности,

1. <u>Методы, основанные на ограниченности области определения и области значений функций.</u>

1) Всё, что связано с функциями, начинается с области определения! В уравнениях и неравенствах находим ОДЗ;
2) Возможно, ОДЗ состоит из одного или небольшого количества чисел (пары чисел); тогда достаточно проверить, являются ли эти числа решениями;
3) Если левая часть уравнения принимает значения, меньшие или равные *а*, а правая большие или равные *а* или наоборот, то равенство левой и правой части достигается тогда, когда они одновременно равны *а;*
4) Если мы можем показать, что в левой части неравенства $f(x)\geq a$ функция $f(x)$ принимает значения, меньшие или равные *а* или наоборот, то решение неравенства сводится к решению уравнения $f(x)=a$
5) Возможно, нужно рассмотреть уравнение или неравенство как квадратное относительно какого-то выражения.

Помним при этом, что $|t|\geq 0$; $t^{2n}\geq 0$;

$ax^2+bx+c\geq$ ув. при $a>0$; $ax^2+bx+c\leq$ ув. при $a<0$; ув .- ордината вершины параболы; равенство достигается при x=хв.

при a>0 $a+\frac{1}{a}\geq 2$, равенство достигается при a=1;

при a<0 $a+\frac{1}{a}\leq -2$, равенство достигается при a=-1;

$-1\leq \sin t\leq 1$; $-1\leq \cos t\leq 1$; $-\sqrt{2}\leq \sin t+\cos t\leq \sqrt{2}$.

$-\pi/2 \le \arcsin t \le \pi/2; \quad 0 \le \arccos t \le \pi.$

Маленькие «хитрости»: если в упражнении явно на использование функционального метода присутствует квадратичная функция, то скорее всего решением будет абсцисса вершины параболы; если есть сумма двух взаимно обратных величин, то решением будет то значение x, при котором одна из них равна 1.

2. Методы, основанные на монотонности функций:

1) если функция f(x) монотонна на некотором промежутке, то уравнение f(x)=a имеет на этом промежутке не более одного корня, который, как правило, можно найти подбором;
2) если функция f(x) возрастает на некотором промежутке, а функция g(x) убывает на этом промежутке (часто на всей области определения), то уравнение f(x)=g(x) имеет на этом промежутке не более одного корня *a* (находим его подбором);
3) решение неравенства $f(x) \le g(x)$ $x \le a$, а неравенства $f(x) \ge g(x)$ – $x \ge a$; в случае строгости одного знака строгий и второй ($<$ - $<$, $>$ - $>$);
4) если функция f(x) монотонна на некотором промежутке, то уравнение f(t) = f(k) равносильно уравнению t = k.

Помним при этом, что:

1) линейная функция y=kx+b возрастает на всей числовой прямой при k>0 и убывает при k<0;
2) функция $y=\sqrt[n]{x}$ возрастает на промежутке [0;+∞) при чётном n; функция $y=\sqrt[n]{x}$ возрастает на всей числовой прямой при нечётном n;
3) обратная пропорциональность $y = \frac{k}{x}$ убывает на каждом из промежутков (-∞;0) и (0;+∞) при k>0 и возрастает на этих же промежутках при k<0;
4) степенная функция $y = x^n$ возрастает на всей числовой прямой при натуральном нечётном n;
5) показательная и логарифмическая функция с основанием a>1 возрастают, а с основанием 0<a<1 убывают;

6) сумма двух возрастающих функций – возрастающая функция, а сумма двух убывающих – убывающая;
7) произведение двух возрастающих (убывающих) функций, принимающих положительные значения, - возрастающая (убывающая) функция;
8) если функция f(x) возрастает на некотором промежутке, то kf(x) возрастает при $k>0$ и убывает при $k<0$ и наоборот; f(kx) возрастает при $k>0$ и убывает при $k<0$ и наоборот; для сложных функций действует «правило умножения положительных и отрицательных чисел», схематически:

f(x)	g(x)	f(g(x))
↑	↑	↑
↓	↑	↓
↑	↓	↓
↓	↓	↑